

Metodika georeferencování map III. vojenského mapování

Milan Talich, Lubomír Soukup, Jan Havrlant, Klára Ambrožová,
Ondřej Böhm, Filip Antoš

Realizováno z programového projektu DF11P01OVV021: Program
aplikovaného výzkumu a vývoje národní a kulturní identity financovaného
MK ČR v rámci projektu

„Kartografické zdroje jako kulturní dědictví. Výzkum nových metodik a
technologií digitalizace, zpřístupnění a využití starých map, plánů, atlasů a
glóbů.“

Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, v.v.i.

říjen 2013

Obsah

1	Úvod	4
2	Formulace problému	4
2.1	Požadovaný výsledek	4
2.2	Vstupní údaje a předpoklady	4
2.2.1	Souřadnice vlíčovacích bodů	5
2.2.2	Přesnost vlíčovacích bodů	5
2.2.3	Zájmová oblast	5
2.3	Hlavní zásady georeferencování map III. vojenského mapování .	5
2.4	Celkový postup transformace	6
3	Eliminace srážky mapového listu	6
3.1	Požadovaný výsledek	7
3.2	Vstupní údaje a předpoklady	7
3.2.1	Souřadnice vlíčovacích bodů	8
3.2.2	Přesnost vlíčovacích bodů	8
3.3	Obecné řešení	8
3.3.1	Zprostředkující rovnice	8
3.3.2	Váhová matice	9
3.3.3	Vyrovnaní metodou nejmenších čtverců	9
3.3.4	Aposteriorní jednotková variance	10
3.4	Obecný postup výpočtu	10
3.4.1	Redukce souřadnic k těžišti vlíčovacích bodů	10
3.4.2	Stanovení přibližných koeficientů afinní transformace . .	10
3.4.3	Vyrovnaní metodou nejmenších čtverců	11
3.4.4	Transformační koeficienty	11
3.4.5	Výsledné transformační rovnice	11
3.5	Postup výpočtu pro mapový list	11
3.5.1	Souřadnice vlíčovacích bodů	11
3.5.2	Výpočet transformačních koeficientů	14
3.5.3	Vlastní transformace podrobných bodů topografické sekce	14
4	Inverze původního kartografického zobrazení Besselova elipso- idu do roviny sekčního mapového listu	15
4.1	Požadovaný výsledek	16
4.2	Vstupní údaje a předpoklady	16
4.3	Obecné řešení	17

5	Kartografické zobrazení Besselova elipsoidu do roviny S-JTSK	19
5.1	Požadovaný výsledek	19
5.2	Vstupní údaje a předpoklady	19
5.3	Obecné řešení	19
5.4	Křovákovo zobrazení	20
5.4.1	Gaussovo konformní zobrazení Besselova elipsoidu na kulovou plochu	20
5.4.2	Transformace zeměpisných souřadnic na kulové ploše	21
5.4.3	Konformní kuželové zobrazení kartografických souřadnic do roviny	21
5.4.4	Transformace polárních souřadnic na kartézské	22
6	Elastická transformace v rovině	22
6.1	Požadovaný výsledek	22
6.2	Vstupní údaje a předpoklady	23
6.3	Teoretická východiska	24
6.3.1	Komplexní aritmetika	24
6.3.2	Metoda kolokace	25
6.4	Obecné řešení	31
6.4.1	Stanovení přibližných parametrů podobnostní transformace	31
6.4.2	Stanovení přibližných globálních souřadnic vlíčovacích bodů	32
6.4.3	Stanovení vektorů souřadnic vlíčovacích bodů	32
6.4.4	Stanovení kovariančních matic	32
6.4.5	Výpočet transformačních parametrů	32
6.4.6	Transformační rovnice	32
6.4.7	Výpočet střední souřadnicové chyby transformace	33
7	Sběr dat a implementační poznámky	33
7.1	Sběr identických bodů	33
7.2	Výsledná složená transformace	34
8	Přehled použité matematické symboliky	35

1 Úvod

Cílem metodiky pro georeferencování rastrových obrazů map III. vojenského mapování Rakousko-uherského císařství (1876-1880) je jejich zpřístupnění odborné veřejnosti formou webových mapových služeb (Web Map Services, WMS).

Georeferencování map III. vojenského mapování Rakousko-uherského císařství do současného kartografického souřadnicového systému je dlouhodobým problémem, který doposud nebyl uspokojivě vyřešen. Tento problém se týká zejména mapových listů v měřítku 1:25 000 (topografických sekcí), kde se díky většímu měřítku výrazněji projevuje jejich polohový nesouhlas se současnými mapami, což prakticky znemožňuje jejich využití službami WMS. Běžným způsobem georeferencování, tj. například při použití pouze rohů mapových listů, se na území ČR docílí polohových chyb na identických bodech o velikostech v rozmezí 12 až 206 m. To jsou dokonce podstatně větší chyby, než jakých bylo dosaženo u map staršího II. vojenského mapování.

Použití této metodiky je přehledně popsáno v článcích [6], [7].

2 Formulace problému

2.1 Požadovaný výsledek

Je třeba stanovit výpočetní postup pro transformaci rastrových obrazů mapových listů III. vojenského mapování a její charakteristiku polohové přesnosti v libovolném bodě.

2.2 Vstupní údaje a předpoklady

Jsou dány **souřadnice vlčovacíh bodů** v lokálním souřadnicovém systému rastrového obrazu mapového listu staré mapy. Dále jsou dány souřadnice těchže vlčovacíh bodů v současném souřadnicovém systému, do něhož je třeba obsah staré mapy přetransformovat.

Je také dána **zájmová oblast**, která má být přetransformována.

2.2.1 Souřadnice vlíčovacích bodů

- \mathbf{x}_i ... vstupní souřadnice i -tého vlíčovacího bodu, $\mathbf{x}_i := [x_i, y_i]$, $i \in I$,
 \mathbf{X}_i ... výstupní souřadnice i -tého vlíčovacího bodu, $\mathbf{X}_i := [X_i, Y_i]$, $i \in I$,
 I ... indexová množina čísel vlíčovacích bodů,
např. $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Přesnost vlíčovacích bodů

Za předpokladu stejné přesnosti ve všech směrech je přesnost libovolného vlíčovacího bodu charakterizována diagonální kovarianční maticí. Oba její diagonální prvky jsou pak rovny střední souřadnicové chybě příslušného vlíčovacího bodu.

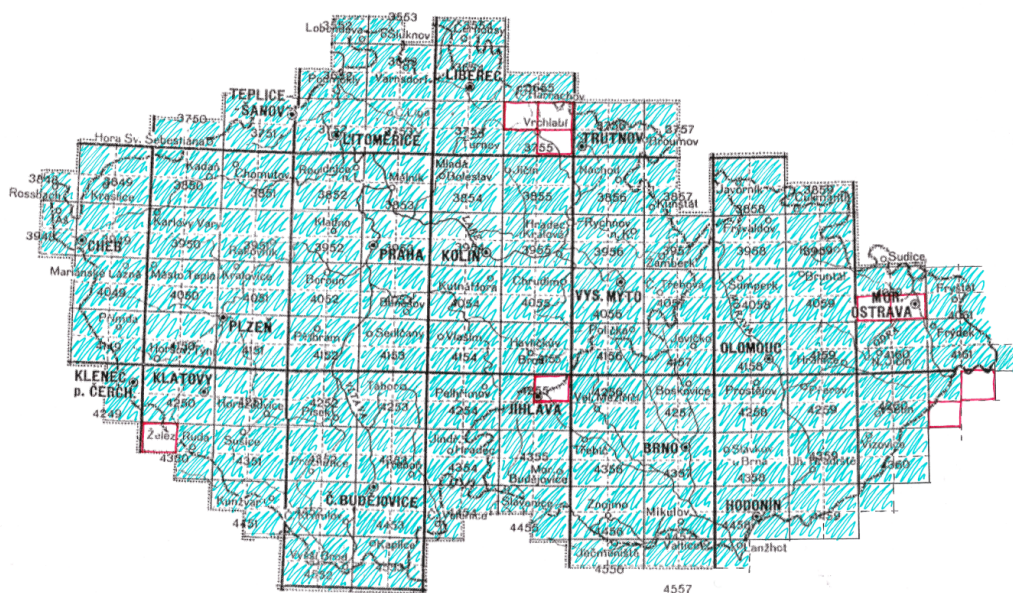
- $\sigma_{xy,i}$... střední souřadnicová chyba i -tého vlíčovacího bodu ve vstupním souřadnicovém systému, $i \in I$.
 $\sigma_{XY,i}$... střední souřadnicová chyba i -tého vlíčovacího bodu ve výstupním souřadnicovém systému, $i \in I$.

2.2.3 Zájmová oblast

Zájmová oblast je vymezena mapovými listy (tzv. topografickými sekcemi) v měřítku 1 : 25000. Tyto topografické sekce jsou naskenovány na kalibrovaném skeneru a uloženy na disku počítače s vhodným grafickým programem pro odměřování souřadnic vlíčovacích bodů.

2.3 Hlavní zásady georeferencování map III. vojenského mapování

1. Ke správnému georeferencování (vlícování) digitalizovaných rastrových obrazů starých map do současného souřadnicového systému je třeba použít co největšího počtu identických (vlíčovacích) bodů. Jejich validita musí být prověřena statistickými testy.
2. Musí být eliminována srážka papíru, respektováno původní kartografické zobrazení map a použita speciální elastická transformace, která dokáže v dostatečné míře korigovat nehomogenní rozložení nepřesnosti (polohový nesoulad se skutečností) starých map a přitom nezpůsobí nepřiměřené deformace jejich původního obsahu.
3. Parametry transformačního modelu musí mít názorný smysl, aby bylo možno transformační model citlivě vyladit.



Obrázek 1: Příklad zájmové oblasti

2.4 Celkový postup transformace

1. Eliminace srážky mapového listu
2. Inverze původního kartografického zobrazení Besselova elipsoidu do roviny sekčního mapového listu
3. Kartografické zobrazení Besselova elipsoidu do roviny S-JTSK
4. Elastická transformace v rovině

3 Eliminace srážky mapového listu

Rozměry mapových listů staré mapy odměřené na jejich rastrových obrazech bývají odlišné od původních správných rozměrů navržených v době vzniku mapového díla. Tato odlišnost svědčí o celkové deformaci mapového listu způsobené postupným sesycháním papíru mapy v průběhu jeho stárnutí (tzv. srážkou mapového listu).

3.1 Požadovaný výsledek

Je třeba stanovit transformační rovnice pro převod rastrových souřadnic oskenovaného mapového listu staré mapy do rovinného souřadnicového systému, v němž mají rozměry mapového listu předepsané správné hodnoty. Přitom se předpokládá, že spolu s napravením rozměrů mapového listu budou též korigovány polohové změny kresby uvnitř mapového listu. Současně je třeba též odhadnout charakteristiku polohové přesnosti této transformace v libovolném bodě mapového listu. Vzhledem k technologii výroby papíru v 19. stol. lze předpokládat, že míra sesychání papíru v průběhu jeho stárnutí nebyla isotropní. Nejjednodušším transformačním modelem deformace mapového listu je tudíž afinní transformace. K eliminaci srážky mapového listu se proto použije afinní transformace souřadnic v rovině

$$\mathbf{t}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [x, y] \mapsto \mathbf{t}_1(x, y) = [X, Y]^T =: \mathbf{X}, \quad (1)$$

$$\mathbf{t}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{X} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{r}, \quad (2)$$

kde

- \mathbf{x} ... správné souřadnice, $\mathbf{x} := [x, y]^T$, odpovídající poloze bodu v době vzniku kresby mapového obsahu,
- \mathbf{X} ... měřené souřadnice, $\mathbf{X} := [X, Y]^T$, v rastrovém obraze oskenovaného mapového listu,
- \mathbf{Q} ... matice afinní transformace,
- \mathbf{r} ... posun počátků souřadnicových systémů.

Souřadnicový systém odpovídající správným souřadnicím \mathbf{x} bude nadále nazýván *vstupní* souřadnicový systém. Souřadnicový systém odpovídající měřeným souřadnicím \mathbf{X} bude nazýván *výstupní* souřadnicový systém.

Podrobný zápis *transformačních rovnic* :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

Koeficienty $q_{i,j}$, r_i afinní transformace (2) se určí pomocí dostatečného počtu vlíčovacích bodů.

3.2 Vstupní údaje a předpoklady

Jsou dány **souřadnice vlíčovacích bodů** ve *vstupním* i *výstupním* souřadnicovém systému a jejich **střední souřadnicové chyby** představující přesnost

určení souřadnic.

Dále je dána **zájmová oblast** podrobných bodů, které mají být transformovány.

3.2.1 Souřadnice vlíčovacích bodů

- \mathbf{x}_i ... vstupní souřadnice i -tého vlíčovacího bodu, $\mathbf{x}_i := [x_i, y_i]$, $i \in I$,
- \mathbf{X}_i ... výstupní souřadnice i -tého vlíčovacího bodu, $\mathbf{X}_i := [X_i, Y_i]$, $i \in I$,
- I ... indexová množina čísel vlíčovacích bodů,
např. $I = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.2.2 Přesnost vlíčovacích bodů

Za předpokladu stejné přesnosti ve všech směrech je přesnost libovolného vlíčovacího bodu charakterizována diagonální kovarianční maticí. Oba její diagonální prvky jsou pak rovny střední souřadnicové chybě příslušného vlíčovacího bodu.

- $\sigma_{xy,i}$... střední souřadnicová chyba i -tého vlíčovacího bodu ve vstupním souřadnicovém systému, $i \in I$.
- $\sigma_{XY,i}$... střední souřadnicová chyba i -tého vlíčovacího bodu ve výstupním souřadnicovém systému, $i \in I$.

Při transformaci mapových listů do souřadnicového systému měřených rastrových souřadnic se předpokládá, že vlíčovací body jsou ve vstupním souřadnicovém systému známy absolutně přesně, neboť jejich souřadnice jsou dány rozměry mapového listu, které závisí jen na parametrech Besselova elipsoidu a jednoznačně stanovených intervalech zeměpisné šířky a délky ($\Delta\varphi = 15'$, $\Delta\lambda = 30'$). V takovém případě je $\sigma_{xy,i} = 0$ pro všechna $i \in I$.

3.3 Obecné řešení

3.3.1 Zprostředkující rovnice

Maticový zápis *transformačních rovnic* pro vlíčovací body :

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{r} . \quad (4)$$

Podrobný zápis *transformačních rovnic* pro vlíčovací body :

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} , \quad i \in I , \quad (5)$$

Maticová zprostředkující rovnice :

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{A}_I \cdot \mathbf{h} . \quad (6)$$

- \mathbf{x}_I ... vektor vstupních souřadnic, $\mathbf{x}_I := [[x_i, y_i]^T | i \in I]^T$,
 \mathbf{X}_I ... vektor výstupních souřadnic, $\mathbf{X}_I := [[X_i, Y_i]^T | i \in I]^T$,
 \mathbf{A}_I ... matice plánu, $\mathbf{A}_I := [[\mathbf{A}_{x,i}, \mathbf{A}_{y,i}, \mathbf{I}_2] | i \in I]^T$,
 \mathbf{h} ... vektor neznámých veličin, $\mathbf{h} := [q_{11}, q_{21}, q_{21}, q_{22}, r_1, r_2]^T$.

Matice \mathbf{A}_I je bloková matice, jejímiž bloky (submaticemi) jsou čtvercové matice řádu 2, a sice $\mathbf{A}_{x,i} := \text{diag}([x_i, x_i])$, $\mathbf{A}_{y,i} := \text{diag}([y_i, y_i])$, $\mathbf{I}_2 := \text{diag}([1, 1])$, tedy

$$\mathbf{A}_{x,i} = \begin{bmatrix} x_i & 0 \\ 0 & x_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{y,i} = \begin{bmatrix} y_i & 0 \\ 0 & y_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (7)$$

Index i udává pořadí submatice ve svislém směru (tzv. blokově sloupcový index). Pro indexovou množinu $I = \{1, 2, \dots, n\}$ má tedy matice \mathbf{A}_I následující blokovou strukturu:

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{x,1} & \mathbf{A}_{y,1} & \mathbf{I}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{x,n} & \mathbf{A}_{y,n} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} . \quad (8)$$

3.3.2 Váhová matice

Přesnost měřených výstupních souřadnic ovlivňuje vyrovnání prostřednictvím váhové matice \mathbf{P} a jednotkové střední chyby $\bar{\sigma}_0$.

$$\mathbf{P} := \bar{\sigma}_0^{-2} \text{diag}([[\sigma_{xy,i}^{-2}, \sigma_{xy,i}^{-2}] | i \in I]) \quad (9)$$

Jednotkovou varianci $\bar{\sigma}_0^{-2}$ lze zvolit libovolně, např.

$$\bar{\sigma}_0^{-2} := \frac{\sum_{i \in I} \sigma_{xy,i}^2}{n} . \quad (10)$$

3.3.3 Vyrovnání metodou nejmenších čtverců

$$\hat{\mathbf{h}} := (\mathbf{A}_I^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_I)^{-1} \cdot \mathbf{A}_I^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_I . \quad (11)$$

3.3.4 Aposteriorní jednotková variance

$$\sigma_0^2 := \frac{(\mathbf{A}_I \cdot \hat{\mathbf{h}} - \mathbf{X}_I)^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}_I \cdot \hat{\mathbf{h}} - \mathbf{X}_I)}{2n - 6}. \quad (12)$$

3.4 Obecný postup výpočtu

Vzorce (11), (12) lze použít k řešení daného problému, avšak pro konkrétní výpočet je výhodné je mírně upravit. Následující výpočetní postup je výhodný jak z hlediska numerické stability, tak z hlediska zobecnění daného problému na případ nepřesných souřadnic vřícovacích bodů v obou souřadnicových systémech (tj. pro $\sigma_{xy,i} > 0$, $\sigma_{XY,i} > 0$), tak pro případ plné (nediagonální) váhové matice \mathbf{P} .

3.4.1 Redukce souřadnic k těžišti vřícovacích bodů

Souřadnice těžiště vřícovacích bodů se určí podle vztahů:

$$\mathbf{1}_x := [[1, 0]^T | i \in I]^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{1}_y := [[0, 1]^T | i \in I]^T, \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{x}} := \left[\frac{\mathbf{1}_s^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}_I}{\mathbf{1}_s^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{1}_s} \mid s \in \{x, y\} \right]^T, \quad \bar{\mathbf{X}} := \left[\frac{\mathbf{1}_s^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{X}_I}{\mathbf{1}_s^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{1}_s} \mid s \in \{x, y\} \right]^T. \quad (15)$$

Redukované souřadnice:

$$\mathbf{x}_i^r := \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{X}_i^r := \mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}. \quad (16)$$

3.4.2 Stanovení přibližných koeficientů afinní transformace

$$\bar{\mathbf{A}}_x := \bar{x} \mathbf{I}_2, \quad \bar{\mathbf{A}}_y := \bar{y} \mathbf{I}_2, \quad (17)$$

Pro vhodnou trojici vřícovacích bodů $\{i, j, k\} \subset I$ obdržíme

$$\mathbf{A}_{\{i,j,k\}}^r := \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{x,i} - \bar{\mathbf{A}}_x & , & \mathbf{A}_{y,i} - \bar{\mathbf{A}}_y & , & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{A}_{x,j} - \bar{\mathbf{A}}_x & , & \mathbf{A}_{y,j} - \bar{\mathbf{A}}_y & , & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{A}_{x,k} - \bar{\mathbf{A}}_x & , & \mathbf{A}_{y,k} - \bar{\mathbf{A}}_y & , & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{X}_{\{i,j,k\}}^r := [\mathbf{X}_u - \bar{\mathbf{X}} \mid u \in \{i, j, k\}]^T.$$

Přibližné koeficienty afinní transformace pak budou

$$\mathbf{h}^\circ := (\mathbf{A}_{\{i,j,k\}}^r)^{-1} \cdot \mathbf{X}_{\{i,j,k\}}^r. \quad (19)$$

3.4.3 Vyrovnání metodou nejmenších čtverců

$$\overline{\sigma_0^2} := \frac{\sum_{i \in I} \sigma_{xy,i}^2}{n} . \quad (20)$$

$$\mathbf{P} := \overline{\sigma_0^2} \text{diag}([\sigma_{xy,i}^{-2}, \sigma_{xy,i}^{-2}] \mid i \in I) , \quad (21)$$

$$n := |I| , \quad (22)$$

$$\mathbf{I}_{2,n} := \underbrace{[\mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_2]}_n^T , \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_I^r := \mathbf{A}_I - [\bar{x} \mathbf{I}_{2,n}, \bar{y} \mathbf{I}_{2,n}, \mathbf{I}_{2,n}] , \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{h}} := ((\mathbf{A}_I^r)^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_I^r)^{-1} \cdot (\mathbf{A}_I^r)^T \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{X}_I^r - \mathbf{A}_I^r \cdot \mathbf{h}^\circ) . \quad (25)$$

3.4.4 Transformační koeficienty

$$[\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \tilde{\mathbf{r}}]^T := \tilde{\mathbf{h}} + \mathbf{h}^\circ \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{Q}} := [\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2] , \quad (27)$$

$$\hat{\mathbf{r}} := \bar{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{Q}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{r}} . \quad (28)$$

3.4.5 Výsledné transformační rovnice

$$\mathbf{t}_1(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{x} + \hat{\mathbf{r}} . \quad (29)$$

3.5 Postup výpočtu pro mapový list

3.5.1 Souřadnice vlíčovacích bodů

Vlíčovacími body jsou rohy mapového listu topografické sekce. Souřadnice vlíčovacích bodů ve výstupním systému byly odměřeny v daném rastru. Označíme je

$$\mathbf{X}_I = [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3] . \quad (30)$$

Indexová množina I je tedy

$$I := \{0, 1, 2, 3\} .$$

Vlčovací bod o souřadnicích \mathbf{X}_0 je umístěn v levém dolním rohu mapového rámu topografické sekce, další vlčovací body \mathbf{X}_i jsou postupně (se zvětšujícím se indexem i) umisťovány do dalších rohů mapového rámu ve směru hodinových ručiček.

Souřadnice vlčovacích bodů ve vstupním systému jsou dány rozměry mapového listu topografické sekce, které závisí na parametrech Besselova elipsoidu, intervalech zeměpisné šířky a délky ($\Delta\varphi = 15'$, $\Delta\lambda = 30'$) a na signatuře mapového listu. Signaturu mapového listu tvoří trojice čísel $[f, g, h]$ udávající pozici mapového listu ve stanoveném kladu mapových listů (viz např. [8]).

f ... pořadí vrstvy, $f \in \{34, \dots, 45\}$,

g ... pořadí sloupce, $g \in \{48, \dots, 61\}$,

h ... umístění v rámci sekčního mapového listu, $h \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Sekční mapový list vznikne projekcí dvojrozměrného intervalu plochy Besselova elipsoidu ($15' \times 30'$) do roviny. Tímto dvojrozměrným intervalem je

$$\mathcal{V}_{f,g} := \left\langle \varphi_f - \frac{\Delta\varphi}{2}, \varphi_f + \frac{\Delta\varphi}{2} \right\rangle \times \left\langle \lambda_g - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_g + \frac{\Delta\lambda}{2} \right\rangle, \quad (31)$$

přičemž φ_f , λ_g jsou zeměpisné souřadnice středu sekčního mapového listu se signaturou $[f, g]$.

$$\begin{aligned} \varphi_f &= \frac{\pi}{3} - \left(f + \frac{1}{2}\right) \Delta\varphi, \\ \lambda_g &= \frac{\pi}{30} + \left(g - \frac{1}{2}\right) \Delta\lambda. \end{aligned} \quad (32)$$

$\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ jsou rozměry zmíněného dvojrozměrného intervalu (31) na ploše Besselova elipsoidu.

$$\Delta\varphi = 15' = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{180}, \quad \Delta\lambda = 30' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{180}. \quad (33)$$

Rozměry sekčního mapového listu se určí následovně. Šířka sekčního mapového listu podél horní, resp. dolní strany mapového rámu odpovídá délce oblouku rovnoběžky o zeměpisné šířce $\varphi_f + \frac{\Delta\varphi}{2}$, resp. $\varphi_f - \frac{\Delta\varphi}{2}$ na Besselově elipsoidu. Šířka sekčního mapového listu podél horní strany mapového rámu je tedy dána vzorcem:

$$s_f = \frac{a}{\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2\left(\varphi_f + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)}} \cos\left(\varphi_f + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) \Delta\lambda \quad (34)$$

Výška sekčního mapového listu odpovídá délce oblouku poledníku na Besselově elipsoidu mezi rovnoběžkami $\varphi_f + \frac{\Delta\varphi}{2}$ a $\varphi_f - \frac{\Delta\varphi}{2}$.

$$v_f = \int_{\varphi_f - \frac{\Delta\varphi}{2}}^{\varphi_f + \frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{a(1 - \epsilon^2)}{(\sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi})^3} d\varphi . \quad (35)$$

Šířka s_f a výška v_f sekčního mapového listu je stejná pro všechny sloupce v kladu sekčních mapových listů. Jejich hodnoty vyčíslené pro parametry Besseleva elipsoidu

$$\begin{aligned} a &= 6377397.15508 , \\ \epsilon &= 0.006693421552039816 , \end{aligned} \quad (36)$$

podle vzorců (34), (35) jsou uvedeny v tabulce 1.

f	s_f [m]	v_f [m]
35	34905.6214	27809.4933
36	35094.5546	27808.3003
37	35282.8133	27807.1051
38	35470.3940	27805.9080
39	35657.2931	27804.7090
40	35843.5073	27803.5082
41	36029.0329	27802.3056
42	36213.8664	27801.1015
43	36398.0045	27799.8958
44	36581.4436	27798.6886
45	36764.1803	27797.4801
46	36946.2111	27796.2704

Tabulka 1: Šířky s_f a výšky v_f sekčního mapového listu

Počátek vstupního souřadnicového systému je umístěn do středu sekčního mapového listu. Souřadnice rohů se signaturou $[f, g, h]$ se pak určí podle vztahu:

$$\mathbf{x}_{2i+j}^{f,g,h} := \begin{bmatrix} \mathcal{B}(\ell) \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(i) \mathcal{B}(\ell)) w_{k,0,\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(j)\mathcal{B}(k)\mathcal{B}(\ell))}^{\square} \\ \mathcal{B}(k) \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(i) \mathcal{B}(j)\mathcal{B}(k)) w_{k,1,\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(j)\mathcal{B}(k)\mathcal{B}(\ell))}^{\square} \end{bmatrix} , \quad (37)$$

kde

$$\mathcal{B}(n) := 2n - 1 , \quad (38)$$

$$\mathcal{B}^{-1}(m) = \frac{1+m}{2},$$

$$\begin{bmatrix} w_{k,0,0}^{\square} & w_{k,0,1}^{\square} \\ w_{k,1,0}^{\square} & w_{k,1,1}^{\square} \end{bmatrix} := \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(s_f + s_{f+1}) & s_{f+k} \\ v_f & v_f \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Indexy k, ℓ představují číslíce binárního zápisu čísla $h-1$, tedy

$$h-1 = 2k + \ell. \quad (40)$$

Explicitní definice indexů k, ℓ :

$$\begin{aligned} k &:= \lfloor (h-1)/2 \rfloor \dots \text{výsledek celočíselného dělení dvěma,} \\ \ell &:= (h-1) \bmod 2 \dots \text{zbytek po dělení dvěma.} \end{aligned}$$

3.5.2 Výpočet transformačních koeficientů

Podle obecného postupu výpočtu (kap. 3.4) se vypočtou transformační koeficienty $\hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{r}}$ podle vzorců (27), (28).

3.5.3 Vlastní transformace podrobných bodů topografické sekce

Dopředná transformace Při dopředné transformaci jsou vstupními souřadnicemi vlíčovacích bodů přesně známé souřadnice $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ vypočtené podle vzorce (37) pomocí následných substitucí (38), (39), (40). Výstupními souřadnicemi vlíčovacích bodů jsou pak měřené rastrové souřadnice $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$.

Pro daný bod zájmového území se vypočtou jeho výstupní souřadnice podle vzorce (29). Zájmové území tvoří lichoběžník, jehož vrcholy jsou zadané vlíčovací body v rozích mapového listu. Vnitřek tohoto lichoběžníku lze vyjádřit jako průnik čtyř polorovin $\mathcal{U}_i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Označíme-li zájmové území symbolem \mathcal{U} , pak platí:

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i=0}^3 \mathcal{U}_i,$$

$$\mathcal{U}_i := \left\{ \mathbf{x}_i + t_i(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) - u_i(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)^\perp \mid t_i \in \mathbb{R}, u_i \in \langle 0, \infty \rangle \right\}, \quad (41)$$

přičemž $(\cdot)^\perp$ značí kolmost, tj. pro $\mathbf{x} = [x, y]^T$ platí

$$\mathbf{x}^\perp := [-y, x]^T,$$

a $\|\cdot\|$ značí normu vektoru, tj.

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}},$$

tedy

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Zpětná transformace Při zpětné transformaci je třeba invertovat transformační rovnice (29).

$$\mathbf{t}_1^{-1}(\mathbf{X}) = \widehat{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot (\mathbf{X} - \widehat{\mathbf{r}}). \quad (42)$$

Zájmovým územím je čtyřúhelník vytvořený vlíčovacími body o souřadnicích $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$.

$$\mathcal{U}^{-1} = \bigcap_{i=0}^3 \mathcal{U}_i^{-1},$$

$$\mathcal{U}_i^{-1} := \left\{ \mathbf{X}_i + t_i(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i) - u_i(\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i)^\perp \mid t_i \in \mathbb{R}, u_i \in \langle 0, \infty \rangle \right\}, \quad (43)$$

Mezi tímto čtyřúhelníkem a lichoběžníkem (41) ovšem přesně neplatí očekávaný vztah

$$\mathbf{t}_1(\mathcal{U}) = \mathcal{U}^{-1},$$

neboť souřadnice $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ jsou zatíženy měřickými chybami.

4 Inverze původního kartografického zobrazení Besselova elipsoidu do roviny sekčního mapového listu

Původně navržené kartografické zobrazení Besselova elipsoidu do roviny bývá v literatuře označováno jako Sansonovo (viz [1]), nebo též Sanson–Flamsteedovo (viz [5]) příp. Mercator–Sansonovo zobrazení (viz [4]). Žádný z těchto názvů však neodpovídá kartografickému zobrazení použitému při III. vojenském mapování, neboť toto zobrazení je polyedrické. Zobrazuje Besselův elipsoid do roviny po částech vymezených dvojrozměrnými elipsoidickými intervaly (31) (elipsoidickými obdélníky $15' \times 30'$), které odpovídají lichoběžníkům v rovině mapy (tzv. sekčním mapovým listům). Na sekčním mapovém listu o signatuře $[f, g]$ je tak zobrazena čtyřúhelníková oblast elipsoidické plochy $\mathcal{V}_{f,g}$.

Sansonovo–Flamsteedovo zobrazení jakožto sinusoidální zobrazení (viz [2]) ve skutečnosti platí jen pro rovnoběžné základny lichoběžníkových sekčních mapových listů a pro svislou osu mapového listu (obraz středního poledníku), a to jen pro kulovou referenční plochu. Zobecnění jednoduchých zobrazovacích rovnic sinusoidálního zobrazení (viz [2]) pro elipsoidickou referenční plochu vyjadřují vztahy pro výpočet rozměrů sekčních mapových listů (34), (35). Tyto rozměry nejsou délkově zkrácené. Kartografické zobrazení pro jednotlivé sekční mapové listy pak vznikne lineární interpolací mezi body těchto tří nezkrácených úseček. K transformaci zeměpisných souřadnic na Besselově elipsoidu do roviny sekčního mapového listu proto bylo použito po částech bilineární zobrazení zachovávající délku středního poledníku a krajních rovnoběžek v každém sekčním mapovém listu (viz [8]). Dvojměrné intervaly zeměpisných souřadnic $\mathcal{V}_{f,g}$ definované v (31) se při něm zobrazují na lichoběžníky sestavené ze čtyř oskenovaných topografických sekcí v měřítku 1 : 25000.

Vzhledem k zmíněné terminologické nejednotnosti bude kartografické zobrazení použité při III. vojenském mapování nadále nazýváno modifikované Sansonovo zobrazení. Při modifikovaném Sansonově zobrazení se tedy povrch Besselova elipsoidu zobrazuje do roviny po částech vymezených dvojměrnými intervaly (31).

4.1 Požadovaný výsledek

Je třeba stanovit transformační rovnice po částech bilineárního zobrazení \mathbf{t}_2 ,

$$\mathbf{t}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [x, y] \mapsto \mathbf{t}_2(x, y) = [\varphi, \lambda]^T ,$$

které zobrazuje lichoběžníky o rozměrech s_{f+1} , s_f , v_f (spodní základna, horní základna (34), výška (35) sekčního mapového listu) na dvojměrné intervaly $\mathcal{V}_{f,g}$ (31). Tato transformace představuje inverzní zobrazení k původnímu kartografickému zobrazení Besselova elipsoidu do roviny sekčního mapového listu.

4.2 Vstupní údaje a předpoklady

Jsou dány rovinné souřadnice rohových bodů sekčního mapového listu o signatuře $[f, g]$. Pro každý sloupec $g \in \{48, \dots, 61\}$ zavedeme označení:

$$x_{f,g,i,j} = -\frac{\mathcal{B}(i) v_f}{2}, \quad \forall j \in \{0, 1\}, \quad (44)$$

$$y_{f,g,i,j} = \frac{\mathcal{B}(j) s_{f+i}}{2}. \quad (45)$$

Funkce \mathcal{B} je definována (38), hodnoty s_{f+i} , v_f jsou dány vzorci (34), (35).

Dále jsou dány zeměpisné souřadnice rohových bodů dvojrozměrného intervalu $\mathcal{V}_{f,g}$ pro sekční mapový list o signatuře $[f, g]$.

$$\varphi_{f,i} = \varphi_f + \mathcal{B}(i) \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (46)$$

$$\lambda_{g,j} = \lambda_g + \mathcal{B}(j) \frac{\Delta\lambda}{2}, \quad (47)$$

kde φ_f , λ_g jsou zeměpisné souřadnice středu sekčního mapového listu (o signatuře $[f, g]$) dané vztahy (32). Přírůstky $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$ byly stanoveny v (33).

4.3 Obecné řešení

Hledané transformační rovnice lze snadno vyjádřit pomocí tzv. plátování v následujícím tvaru:

$$\mathbf{t}_2(x, y) = \mathbf{p}_{f,g} \left(\frac{x - x_{f,g,0,0}}{x_{f,g,1,1} - x_{f,g,0,0}}, \frac{y - y_{f,g,0,0}}{y_{f,g,1,1} - y_{f,g,0,0}} \right). \quad (48)$$

Funkce $\mathbf{p}_{f,g}$ představuje tzv. plát, což je vektorová funkce

$$\mathbf{p}_{f,g} : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2 : [u, v] \mapsto \mathbf{p}_{f,g}(u, v),$$

která je definována implicitně rovnicí

$$[F_0(U), -1, F_1(U)] \cdot \mathbf{M}_{f,g} \cdot [F_0(V), -1, F_1(V)]^T = 0. \quad (49)$$

Přitom $\mathbf{M}_{f,g}$ je tzv. matice plátu,

$$\mathbf{M}_{f,g} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{f,g,0,0} & \boldsymbol{\alpha}_{f,g,0,0}(V) & \mathbf{z}_{f,g,0,1} \\ \boldsymbol{\alpha}_{f,g,1,0}(U) & \mathbf{p}_{f,g}(U, V) & \boldsymbol{\alpha}_{f,g,1,1}(U) \\ \mathbf{z}_{f,g,1,0} & \boldsymbol{\alpha}_{f,g,0,1}(V) & \mathbf{z}_{f,g,1,1} \end{bmatrix}, \quad (50)$$

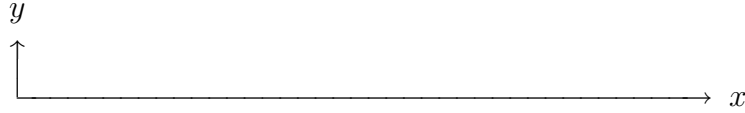
$$\mathbf{z}_{f,g,i,j} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_{f,g,i,j} \\ y_{f,g,i,j} \end{bmatrix}, \quad (51)$$

Funkce $\boldsymbol{\alpha}_{f,g,i,j}$, $i, j \in \{0, 1\}$ slouží k parametrickému vyjádření křivek tvořících okraje plátu. V případě bilineárního zobrazení představují vektorové funkce $\boldsymbol{\alpha}_{f,g,i,j}$ úsečky.

$$\boldsymbol{\alpha}_{f,g,i,j}(t) := \mathbf{z}_{f,g,j-ij,ij} + (\mathbf{z}_{f,g,j-ij+i,ij+1-i} - \mathbf{z}_{f,g,j-ij,ij}) \cdot t. \quad (52)$$

Označení rohů a hran plátu znázorňuje následující diagram. V něm jsou hrany znázorněny šipkami a jejich označení uvedeno menšími písmeny podél šipek. Směr šipky udává směr narůstání parametru příslušné okrajové křivky.

$$\begin{array}{ccc} [1, 0] & \xrightarrow{[0,1]} & [1, 1] \\ [1,0] \uparrow & & \uparrow [1,1] \\ [0, 0] & \xrightarrow{[0,0]} & [0, 1] \end{array} \quad (53)$$



Souřadnice $\mathbf{z}_{f,g,i,j}$ odpovídají rohům sekčního mapového listu definovaného rovnicemi (48), (49), (50) pro lineární funkce $F_0, F_1, \boldsymbol{\alpha}_{f,g,i,j}$ ($i, j \in \{0, 1\}$). Funkce F_0, F_1 jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned} F_0(t) &:= 1 - t, \\ F_1(t) &:= t, \end{aligned} \quad (54)$$

Obecný bod plátu se vypočte podle vzorce

$$\mathbf{p}_{f,g}(T_0, T_1) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \boldsymbol{\alpha}_{f,g,i,j}(T_{1-i}) F_j(T_i) - \mathbf{z}_{f,g,i,j} F_i(T_0) F_j(T_1), \quad (55)$$

který se následně dosadí do vztahu (48).

Inverzní transformace K řešení inverzní transformace stačí zaměnit vstupní a výstupní souřadnicový systém. Přitom je vždy nutné normovat vstupní souřadnice na interval $\langle 0, 1 \rangle$, tj.

$$\mathbf{t}_2^{-1}(\varphi, \lambda) = \tilde{\mathbf{p}}_{f,g} \left(\frac{\varphi - \varphi_{f,0}}{\varphi_{f,1} - \varphi_{f,0}}, \frac{\lambda - \lambda_{g,0}}{\lambda_{g,1} - \lambda_{g,0}} \right). \quad (56)$$

Matice inverzního plátu bude:

$$\widetilde{\mathbf{M}}_{f,g} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,0,0} & \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{f,g,0,0}(V) & \widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,0,1} \\ \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{f,g,1,0}(U) & \widetilde{\mathbf{p}}_{f,g}(U, V) & \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{f,g,1,1}(U) \\ \widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,1,0} & \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{f,g,0,1}(V) & \widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,1,1} \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,i,j} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varphi_{f,i} \\ \lambda_{g,j} \end{bmatrix}, \quad (58)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{f,g,i,j}(t) := \widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,j-ij,ij} + (\widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,j-ij+i,ij+1-i} - \widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,j-ij,ij}) \cdot t. \quad (59)$$

Obecný bod plátu se vypočte podle vzorce

$$\widetilde{\mathbf{p}}_{f,g}(T_0, T_1) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{f,g,i,j}(T_{1-i}) F_j(T_i) - \widetilde{\mathbf{z}}_{f,g,i,j} F_i(T_0) F_j(T_1), \quad (60)$$

který se následně dosadí do vztahu (56).

5 Kartografické zobrazení Besselova elipsoidu do roviny S-JTSK

5.1 Požadovaný výsledek

Je třeba zadat transformaci elipsoidických souřadnic bodu $[\varphi, \lambda]$ na Besselově elipsoidu na kartézské souřadnice $[X, Y]$.

5.2 Vstupní údaje a předpoklady

Jsou dány elipsoidické souřadnice bodu na Besselově elipsoidu $[\varphi, \lambda]$.

5.3 Obecné řešení

$$\mathbf{t}_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [\varphi, \lambda] \mapsto \mathbf{t}_3(\varphi, \lambda) = [X, Y]^T =: \mathbf{X}, \quad (61)$$

V této metodice se předpokládá Křovákovo zobrazení Besselova elipsoidu do roviny souřadnicového systému S-JTSK (viz např. [3]). V případě jiného kartografického zobrazení je třeba funkci \mathbf{t}_3 implementovat ve dvou krocích:

1. Transformace Besselova elipsoidu na použitý referenční elipsoid (např. WGS84),
2. Kartografické zobrazení použitého referenčního elipsoidu do roviny (např. UTM)

V případě Křovákova zobrazení je transformace \mathbf{t}_3 čtyřkroková:

$$[\varphi, \lambda] \xrightarrow{\mathbf{K}_1} [U, V] \xrightarrow{\mathbf{K}_2} [\check{S}, D] \xrightarrow{\mathbf{K}_3} [\rho, \varepsilon] \xrightarrow{\mathbf{K}_4} [X, Y]$$

5.4 Křovákovo zobrazení

$$\mathbf{t}_3(\varphi, \lambda) = \mathbf{K}_4(\mathbf{K}_3(\mathbf{K}_2(\mathbf{K}_1(\varphi, \lambda))))$$

5.4.1 Gaussovo konformní zobrazení Besselova elipsoidu na kulovou plochu

$$\mathbf{K}_1 : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle : [\varphi, \lambda] \mapsto [U, V]$$

$$\varphi_o = 49^\circ 30'$$

$$\begin{aligned} U &= 2 \left(\arctan \frac{\left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{1-\epsilon \sin \varphi}{1+\epsilon \sin \varphi} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \right)^\alpha}{k} - \frac{\pi}{4} \right) \\ V &= \alpha \cdot \lambda \end{aligned} \tag{62}$$

Použité konstanty:

$$U_o = 49^\circ 27' 32,84625''$$

$$\varphi_o = 49^\circ 30'$$

$$\alpha = 1,000597498372$$

$$k = 0.9965924869$$

$$R = 6380703.6105$$

Inverzní zobrazení: Při označení

$$\Delta U = U - U_0$$

lze vyjádřit přibližné řešení rovnice (62) ve tvaru řady:

$$\begin{aligned} \varphi &= 100.1416022789 \cdot 10^{-2} \cdot \Delta U - 86.87150417 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta U^2 + \\ &\quad + 16.70197 \cdot 10^{-8} \cdot \Delta U^3 + 117.5089 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta U^4 - \varphi_0, \\ \lambda &= \frac{V}{\alpha}. \end{aligned} \quad (63)$$

5.4.2 Transformace zeměpisných souřadnic na kulové ploše

$$\mathbf{K}_2 : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle : [U, V] \mapsto [\check{S}, D]$$

$$\begin{aligned} \sin \check{S} &= \sin(U_Q) \sin U + \cos(U_Q) \cos U \cos(\Delta V) \\ \sin D &= \frac{\sin(\Delta V) \cos U}{\cos(\check{S})} \end{aligned} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \sin U &= \sin(\check{S}) \sin(U_Q) - \cos(\check{S}) \cos(U_Q) \cos D \\ \sin(\Delta V) &= \frac{\cos(\check{S}) \sin D}{\cos U}, \end{aligned} \quad (65)$$

$$\Delta V = V_Q - V.$$

5.4.3 Konformní kuželové zobrazení kartografických souřadnic do roviny

$$\mathbf{K}_3 : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow (0, \infty) \times \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle : [\check{S}, D] \mapsto [\rho, \varepsilon]$$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left(\frac{\tan\left(\frac{\check{S}_0}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\check{S}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right)^n \\ \varepsilon &= n \cdot D. \end{aligned} \quad (66)$$

$$\check{S}_0 = 78^\circ 30'$$

$$\begin{aligned}\rho_o &= 0.9999R \tan \check{S}_o \\ D &= \frac{\varepsilon}{n}\end{aligned}$$

5.4.4 Transformace polárních souřadnic na kartézské

$$\mathbf{K}_4 : (0, \infty) \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2 : [\rho, \varepsilon] \mapsto [X, Y]$$

$$\begin{aligned}X &= \rho \cos \varepsilon \\ Y &= \rho \sin \varepsilon\end{aligned}\tag{67}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \varepsilon &= \arctan \frac{Y}{X}\end{aligned}\tag{68}$$

6 Elastická transformace v rovině

6.1 Požadovaný výsledek

Je třeba stanovit transformační rovnice elastické transformace a její charakteristiku polohové přesnosti v libovolném bodě. Touto požadovanou charakteristikou přesnosti je **střední souřadnicová chyba** $\sigma_{XY}(\hat{X}, \hat{Y})$ bodu o souřadnicích $[\hat{X}, \hat{Y}]$ definovaná jako parametr dvojrozměrného normálního rozdělení s hustotou pravděpodobnosti

$$\frac{1}{2\pi (\sigma_{XY}(\hat{X}, \hat{Y}))^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\xi - \hat{X})^2 + (\eta - \hat{Y})^2}{(\sigma_{XY}(\hat{X}, \hat{Y}))^2}\right).\tag{69}$$

Symboly ξ, η představují náhodné souřadnice bodu, jehož přesnost je stanovována.

Symbol $\sigma_{XY}(\hat{X}, \hat{Y})$ bude v dalším textu většinou nahrazován stručnějším symbolem σ_{XY} , pokud bude zřejmé, že bod $[\hat{X}, \hat{Y}]$ představuje libovolný bod mapového listu.

6.2 Vstupní údaje a předpoklady

1. Současný souřadnicový systém vzniklý kartografickým zobrazením do roviny (S-JTSK) budeme nazývat *vstupní souřadnicový systém* a výsledný souřadnicový systém po aplikaci elastické transformace výstupní souřadnicový systém.
2. Mezi oběma zvolenými souřadnicovými systémy platí přibližně **podobnostní transformace**.

$$\mathbf{t}_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [x, y] \mapsto \mathbf{t}_4(x, y) = [X, Y], \quad (70)$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & , & -p_2 \\ p_2 & , & p_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad (71)$$

kde

x, y ... vstupní souřadnice,
 X, Y ... výstupní souřadnice,
 p_1, p_2, q_1, q_2 ... transformační koeficienty.

3. V obou souřadnicových systémech byly změřeny **souřadnice zvolených vlíčovacích bodů**. Volba vlíčovacích bodů je popsána v kapitole 7.

x_j, y_j ... vstupní souřadnice j -tého *vlíčovacího bodu*, $j \in J$,
 X_j, Y_j ... výstupní souřadnice j -tého *vlíčovacího bodu*, $j \in J$,
 J ... indexová množina čísel *vlíčovacích bodů*,
např. $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Je známa **přesnost měření vlíčovacích bodů** v obou souřadnicových systémech. Ke každému *vlíčovacímu bodu* je tedy dána jeho *střední souřadnicová chyba* vzhledem k oběma souřadnicovým systémům. Současně předpokládáme normální rozdělení pravděpodobnosti polohy každého vlíčovacího bodu v obou souřadnicových systémech.

$\sigma_{xy,j}$... střední souřadnicová chyba j -tého vřícovacího bodu ve vstupním souřadnicovém systému,

$\sigma_{XY,j}$... střední souřadnicová chyba j -tého vřícovacího bodu ve výstupním souřadnicovém systému.

5. V zájmovém území se předpokládají odchylky od podobnostního vztahu mezi odpovídajícími si souřadnicemi téhož bodu. Tyto odchylky způsobují lokální **polohové deformace** mapové kresby vůči podobnostní transformaci. Odchylky dvou blízkých bodů jsou statisticky závislé. Jejich kovariance klesá se vzdáleností obou bodů. Při nekonečné vzdálenosti obou bodů se jejich kovariance anulují. Při nulové vzdálenosti obou bodů přejde statistická závislost ve funkční závislost a sice identitu.
6. Průběh kovariance odchylek v závislosti na vzdálenosti odpovídajících bodů je dán prostřednictvím tzv. *kovarianční funkce*.

$$c(u) := \sigma^2 \exp(-d^2 u^2) , \quad (72)$$

kde

c ... kovanianční funkce

σ ... střední souřadnicová chyba udávající míru lokální polohové deformace vůči podobnostní transformaci.

u ... vzdálenost bodů, jejichž závislost je určována kovanianční funkcí c

d ... rychlost klesání kovanianční funkce se vzdáleností — při větší hodnotě d klesá kovanianční funkce rychleji

Kovanianční funkce c je tedy dána vztahem (72) až na parametry σ , d . Tyto parametry budou určeny v průběhu vlastního řešení.

6.3 Teoretická východiska

6.3.1 Komplexní aritmetika

Postup řešení lze výhodně zapsat pomocí veličin v komplexním číselném oboru.

Souřadnice x , y bodu v rovině budou vždy reprezentovány jedním komplexním číslem $w \in \mathbb{C}$:

$$w = x + \mathbf{i}y ,$$

kde \mathbf{i} je imaginární jednotka ($\mathbf{i} := \sqrt{-1}$).

Jednotlivé (reálné) souřadnice lze pak extrahovat z komplexního čísla $w = x + \mathbf{i}y$ pomocí operátorů \Re , \Im .

$$x = \Re(w) , \quad y = \Im(w) .$$

Pro reprezentaci dvojice reálných čísel $[x, y]$ jedním komplexním číslem $w = x + \mathbf{i}y$, budeme používat zápis

$$w = \text{complex}(x, y) \tag{73}$$

Číslo komplexně sdružené ke komplexnímu číslu w budeme značit \bar{w} .

$$\bar{w} := x - \mathbf{i}y .$$

Absolutní hodnotu komplexního čísla $w = x + \mathbf{i}y$ budeme značit $|w|$.

$$|w| := \sqrt{w\bar{w}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Kvůli stručnějšímu zápisu budeme číslicemi 1, 0 zapisovat příslušná komplexní čísla s nulovou imaginární složkou, tj.

$$1 = 1 + \mathbf{i}0 ,$$

$$0 = 0 + \mathbf{i}0 .$$

6.3.2 Metoda kolokace

Pro modelování lokálních polohových deformací staré mapy lze použít metodu kolokace. Metoda kolokace respektuje statistickou závislost odchylek od podobnostní transformace a unožňuje tuto závislost popsat pomocí *kovarianční funkce* (72).

Pro aplikaci metody kolokace je nutné nejdříve sestavit výchozí rovnice, které by formálně zachytily uvedené geometrické a statistické předpoklady. Takové rovnice se nazývají zprostředkující rovnice.

Sestavení zprostředkujících rovnic Podobnostní vztah mezi vstupním a výstupním souřadnicovým systémem zohledňuje podobnostní transformace \mathbf{t}_4 definovaná vztahy (70), (71). Lze ji jednoduše vyjádřit jako komplexní funkci

$$t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : w \mapsto t(w) = W = pw + q , \tag{74}$$

kde

$$\begin{aligned}
w &= x + \mathbf{i}y & \dots & \text{vstupní souřadnice,} \\
W &= X + \mathbf{i}Y & \dots & \text{výstupní souřadnice,} \\
p &= p_1 + \mathbf{i}p_2 & \dots & \text{transformační koeficienty (rotace} \\
& & & \text{a změna měřítka souřadnicových os),} \\
q &= q_1 + \mathbf{i}q_2 & \dots & \text{transformační koeficienty (vzájemný po-} \\
& & & \text{sun počátků souřadnicových systémů).}
\end{aligned}$$

Podle (71) lze snadno nahlédnout, že původní vektorová transformace \mathbf{t}_4 (70) je s komplexní funkcí t (74) svázána jednoduchým vztahem:

$$\mathbf{t}_4(x, y) = [\Re(t(x + \mathbf{i}y)), \Im(t(x + \mathbf{i}y))] .$$

Transformační rovnice z definice (74)

$$W = p w + q \tag{75}$$

vyhovuje všem bodům zájmového území, tedy i vlíčovacím bodům. Platí proto také:

$$W_j = p w_j + q , \quad j \in J , \tag{76}$$

kde

$$\begin{aligned}
w_j &= x_j + \mathbf{i}y_j & \dots & \text{vstupní souřadnice } j\text{-tého vlíčovacího bodu,} \\
W_j &= X_j + \mathbf{i}Y_j & \dots & \text{výstupní souřadnice } j\text{-tého vlíčovacího bodu.}
\end{aligned}$$

Soustavu rovnic (76) můžeme zapsat i ve vektorovém tvaru:

$$\mathbf{W} = p \mathbf{w} + q , \tag{77}$$

kde \mathbf{w} , \mathbf{W} jsou komplexní vektory obsahující souřadnice vlíčovacích bodů v obou souřadnicových systémech.

$$\mathbf{w} := [w_1, \dots, w_n]^T ,$$

$$\mathbf{W} := [W_1, \dots, W_n]^T .$$

Soustava rovnic (75), (77) je tedy formálním vyjádřením stanovených geometrických předpokladů.

Statistické předpoklady splníme zavedením měřických chyb na vlíčovacích bodech ε_j , \mathcal{E}_j a odchylek φ , φ_j představujících lokální polohové deformace mapové kresby.

$$\begin{aligned}
W + \varphi &= p w + q \\
W_j + \mathcal{E}_j + \varphi_j &= p(w_j + \varepsilon_j) + q , \quad j \in J ,
\end{aligned} \tag{78}$$

kde

- ε_j ... měřická chyba vstupních souřadnic j -tého *vlícovacího bodu*,
- \mathcal{E}_j ... měřická chyba výstupních souřadnic j -tého *vlícovacího bodu*,
- φ ... odchylka výstupních souřadnic obecného bodu,
- φ_j ... odchylka výstupních souřadnic j -tého *vlícovacího bodu*.

U všech náhodných veličin $\varepsilon_j, \mathcal{E}_j$ je známé jejich rozdělení pravděpodobnosti, neboť jsou dány jejich střední souřadnicové chyby $\sigma_{xy,j}, \sigma_{XY,j}$ a předpoklad normality. Rovněž je známé sdružené rozdělení pravděpodobnost náhodných veličin φ, φ_j . Tím je $(n + 1)$ -rozměrné normální rozdělení pravděpodobnosti, jehož kovarianční matice je zadána prostřednictvím kovarianční funkce c . (Prozatím předpokládáme, že parametry d, σ jsou vhodně zvoleny.) Sdruženým rozdělením pravděpodobnosti náhodných veličin $\varphi, \varphi_j, \mathcal{E}_j, \varepsilon_j$ je tedy $(3n + 1)$ -rozměrné normální rozdělení pravděpodobnosti s kovarianční maticí

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & , & \mathbf{C}_w^\square & , & \mathbf{O}_n^T \\ (\mathbf{C}_w^\square)^T & , & \mathbf{C}_{2,2} & , & \mathbf{O}_{n,n} \\ \mathbf{O}_n & , & \mathbf{O}_{n,n} & , & \mathbf{C}_{\varepsilon,\varepsilon} \end{bmatrix}, \quad (79)$$

kde

- $\mathbf{C}_w^\square := [c(|w - w_i|) \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}]$,
- $\mathbf{C}_{2,2} := [c(|w_j - w_i|) \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\}]$,
- $\mathbf{O}_n := [0, \dots, 0]^T$... n -rozměrný nulový vektor (sloupcový),
- $\mathbf{O}_{n,n} := [0 \mid i, j \in \{1, 2, \dots, n\}]$... čtvercová nulová matice řádu n ,
- $\mathbf{C}_{\varepsilon,\varepsilon} := \text{diag}(\sigma_{XY,1}^2, \dots, \sigma_{XY,n}^2, \sigma_{xy,1}^2, \dots, \sigma_{xy,n}^2)$.

V soustavě rovnic (78) je nejvýznamnější neznámou veličinou W , neboť představuje výstupní souřadnice bodu, jehož přesnost určujeme. Dalšími neznámými veličinami jsou parametry podobnostní transformace p, q .

Hodnoty veličin w_j, W_j jsou známy, neboť byly zjištěny měřením souřadnic vlícovacích bodů. Prozatím předpokládáme, že volba bodu, v němž má být stanovena přesnost mapy, se uskuteční prostřednictvím jeho vstupních souřadnic. Proto považujeme i hodnotu w za známou.

Soustavu rovnic (78) lze vyřešit pro neznámé veličiny W, p, q a současně určit jejich rozdělení pravděpodobnosti. K tomu je možné použít standardní metodu nejmenších čtverců, avšak předem je nutno separovat neznámé veličiny W, p, q od náhodných veličin $\varepsilon_j, \mathcal{E}_j, \varphi, \varphi_j$. Nejjednodušším způsobem separace neznámých a náhodných veličin je linearizace.

První rovnice v soustavě (78) je lineární, a proto je u ní separace jednoduchá. Zbývající rovnice linearizujeme s pomocí přibližných hodnot neznámých veličin $W^\circ, p^\circ, q^\circ$. Tyto přibližné hodnoty použijeme i v první rovnici, přestože to kvůli separaci není nutné. Je to však nutné z důvodu jednotné volby neznámých a konstant. Při označení

$$\begin{aligned} W &= W^\circ + \Delta W \\ p &= p^\circ + \Delta p \\ q &= q^\circ + \Delta q \end{aligned} \tag{80}$$

přejde soustava rovnic (78) na ekvivalentní soustavu s neznámými $\Delta W, \Delta p, \Delta q$.

$$\begin{aligned} \Delta p w + \Delta q + \Delta W + p^\circ w + q^\circ - W^\circ &= \varphi \\ \Delta p w_j + \Delta q + p^\circ w_j + q^\circ - W_j &\doteq \mathcal{E}_j - p^\circ \varepsilon_j + \varphi_j, \quad j \in J. \end{aligned} \tag{81}$$

Přitom byl zanedbán člen $\Delta p \varepsilon_j$.

Zvolíme-li přibližné hodnoty neznámých veličin $W^\circ, p^\circ, q^\circ$ tak, aby platilo

$$W^\circ = p^\circ w + q^\circ \tag{82}$$

a zavedeme-li pomocné hodnoty výstupních souřadnic vřícovacích bodů

$$W_j^\circ := p^\circ w_j + q^\circ, \quad j \in J, \tag{83}$$

pak se soustava rovnic (81) zjednoduší na tvar:

$$\begin{aligned} \Delta p w + \Delta q + \Delta W &= \varphi \\ \Delta p w_j + \Delta q + W_j^\circ - W_j &\doteq \mathcal{E}_j - p^\circ \varepsilon_j + \varphi_j, \quad j \in J. \end{aligned} \tag{84}$$

V tomto tvaru již můžeme vyjádřit zprostředkující rovnice maticově, zavedeme-li označení:

- \mathbf{h}° := $[p^\circ, q^\circ]^T$... přibližné transformační parametry,
 $\Delta \mathbf{h}$:= $[\Delta p, \Delta q]^T$... přírůstky transformačních parametrů,
 \mathbf{h} := $[p, q]^T$... transformační parametry, $\mathbf{h} = \mathbf{h}^\circ + \Delta \mathbf{h}$,
 \mathbf{W} := $[W_1, \dots, W_n]^T$... souřadnice vlíčovacích bodů ve výstupním souřadnicovém systému,
 \mathbf{W}° := $[W_1^\circ, \dots, W_n^\circ]^T$... přibližné souřadnice vlíčovacích bodů ve výstupním souřadnicovém systému,
 φ ... odchylka výstupních souřadnic obecného bodu,
 $\boldsymbol{\varphi}$:= $[\varphi_1, \dots, \varphi_n]^T$... vektor odchylek výstupních souřadnic,
 $\boldsymbol{\varepsilon}$:= $[\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]^T$... vektor měřických chyb výstupních a vstupních souřadnic,
 \mathbf{O}_n := $[0, \dots, 0]^T$... n -rozměrný nulový vektor (sloupcový),
 $\mathbf{1}_n$:= $[1, \dots, 1]^T$... n -rozměrný jedničkový vektor (sloupcový),
 \mathbf{I}_n ... jednotková matice řádu n ,
 \mathbf{a}_w := $[w, 1]$,
 \mathbf{A} := $[\mathbf{w}, \mathbf{1}_n]$,
 \mathbf{B} := $[\mathbf{I}_n, -p^\circ \mathbf{I}_n]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & , & \mathbf{a}_w \\ \mathbf{O}_n & , & \mathbf{A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta W \\ \Delta \mathbf{h} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}^\circ - \mathbf{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & , & \mathbf{O}_n^T & , & \mathbf{O}_{2n}^T \\ \mathbf{O}_n & , & \mathbf{I}_n & , & \mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi \\ \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

Tuto soustavu rovnic lze přehledně zapsat pomocí matic

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{A}} &:= \begin{bmatrix} 1 & , & \mathbf{a}_w \\ \mathbf{O}_n & , & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{h}} &:= \begin{bmatrix} \Delta W \\ \Delta \mathbf{h} \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{l}} &:= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W} - \mathbf{W}^\circ \end{bmatrix}, \\
\mathbf{D} &:= \begin{bmatrix} 1 & , & \mathbf{O}_n^T & , & \mathbf{O}_{2n}^T \\ \mathbf{O}_n & , & \mathbf{I}_n & , & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{v} &:= \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{h}} - \tilde{\mathbf{l}} &= \mathbf{D} \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{85}$$

a řešit ji standardní metodou nejmenších čtverců, tzn. splnit podmínku

$$(\tilde{\mathbf{A}} \hat{\tilde{\mathbf{h}}} - \tilde{\mathbf{l}})^\# \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{A}} \hat{\tilde{\mathbf{h}}} - \tilde{\mathbf{l}}) = \min_{\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbb{C}^3} (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{h}} - \tilde{\mathbf{l}})^\# \mathbf{Q} (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{h}} - \tilde{\mathbf{l}}), \tag{86}$$

v níž symbol $\#$ označuje adjungovanou matici, tzn.

$\mathbf{M}^\# := \overline{\mathbf{M}^T} \dots$ adjungovaná matice k matici \mathbf{M} (transponovaná a komplexně sdružená)

\mathbf{Q} je váhová matice

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{D} \mathbf{C} \mathbf{D}^\#)^{-1}$$

vypočtená pomocí kovarianční matice \mathbf{C} (viz. (79)), pro neznámý vektor $\hat{\tilde{\mathbf{h}}}$.

Tím se odhadnou hodnoty určovaných veličin ΔW , Δp , Δq .

$$\hat{\tilde{\mathbf{h}}} = (\tilde{\mathbf{A}}^\# \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^\# \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{l}}. \tag{87}$$

Po dosazení submatic \mathbf{A} , \mathbf{B} do blokových matic $\tilde{\mathbf{A}}$, \mathbf{D} a subvektoru $\mathbf{W} - \mathbf{W}^\circ$ do vektoru $\tilde{\mathbf{l}}$ pak lze s využitím inverze blokové matice vyjádřit transformační vztah mezi souřadnicemi obecného bodu ve vstupním a výstupním souřadnicovém systému.

$$\widehat{W} = W^\circ + \mathbf{C}_w^\square \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{W}^\circ - \mathbf{A} \cdot \widehat{\Delta \mathbf{h}}) + \mathbf{a}_w \cdot (\widehat{\Delta \mathbf{h}} + \mathbf{h}^\circ), \tag{88}$$

kde

$\mathbf{P} := (\mathbf{B} \mathbf{C}_{\varepsilon, \varepsilon} \mathbf{B}^\# + \mathbf{C}_{2,2})^{-1} \dots$ váhová matice,

$\mathbf{A}^\# := \overline{\mathbf{A}^T} \dots$ adjungovaná matice (transponovaná a komplexně sdružená)

$\widehat{\Delta \mathbf{h}} := (\mathbf{A}^\# \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\# \mathbf{P} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^\circ)$.

Přechodem od komplexních čísel w, \widehat{W} k odpovídajícím reálným souřadnicím $[x, y], [\widehat{X}, \widehat{Y}]$;

$$w = x + \mathbf{i}y, \quad \widehat{W} = \widehat{X} + \mathbf{i}\widehat{Y}$$

můžeme vyjádřit transformační rovnice (88) v symbolickém tvaru:

$$[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \mathbf{t}_4(x, y) = [\Re(\widehat{W}), \Im(\widehat{W})], \quad (89)$$

kde \mathbf{t}_4 je zobrazení

$$\mathbf{t}_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [x, y] \mapsto \mathbf{t}_4(x, y). \quad (90)$$

K řešení inverzní transformace stačí zaměnit vstupní a výstupní souřadnicový systém.

Kovarianční matice odhadovaných veličin $\Delta W, \Delta p, \Delta q$ je:

$$(\tilde{\mathbf{A}}^\# \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{A}})^{-1}. \quad (91)$$

V matici (91) je významný jen první prvek, který představuje varianci výstupních souřadnic W obecného bodu. Odmocnina variance W je hledanou střední souřadnicovou chybou $\sigma_{XY}(\widehat{X}, \widehat{Y})$. Provedením blokové inverze (91) a odmocněním prvního prvku invertované matice vznikne hledaný vzorec pro výpočet $\sigma_{XY}(\widehat{X}, \widehat{Y})$.

$$\sigma_{XY}(\widehat{X}, \widehat{Y}) =$$

$$\sqrt{\sigma^2 - \mathbf{C}_w^\top \mathbf{P} (\mathbf{C}_w^\top)^T + (\mathbf{a}_w - \mathbf{C}_w^\top \mathbf{P} \mathbf{A}) (\mathbf{A}^\# \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{a}_w - \mathbf{C}_w^\top \mathbf{P} \mathbf{A})^\#} \quad (92)$$

$$w = \text{complex}(\mathbf{t}_4^{-1}(\widehat{X}, \widehat{Y}))$$

Nastíněný postup bude v další kapitole podrobně rozpracován do konkrétního algoritmu.

6.4 Obecné řešení

6.4.1 Stanovení přibližných parametrů podobnostní transformace

Např. pro dvojici vhodných vlíčovacích bodů $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ lze zvolit jednoduše

$$p^\circ := \frac{W_j - W_i}{w_j - w_i}, \quad (93)$$

$$q^\circ := \frac{W_i w_j - W_j w_i}{w_j - w_i}. \quad (94)$$

6.4.2 Stanovení přibližných globálních souřadnic vlíčovacích bodů

$$W_i^\circ := p^\circ w_i + q^\circ, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

6.4.3 Stanovení vektorů souřadnic vlíčovacích bodů

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &:= [W_1, \dots, W_n]^T = [W_i | i \in \{1, 2, \dots, n\}]^T, \\ \mathbf{W}^\circ &:= [W_1^\circ, \dots, W_n^\circ]^T = [W_i^\circ | i \in \{1, 2, \dots, n\}]^T, \end{aligned} \quad (95)$$

$$\mathbf{w} := [w_1, \dots, w_n]^T = [w_i | i \in \{1, 2, \dots, n\}]^T. \quad (96)$$

6.4.4 Stanovení kovariančních matic

1. Kovarianční matice měřených vlíčovacích bodů

$$\mathbf{C}_{\varepsilon, \varepsilon} := \text{diag}(\sigma_{XY,1}^2, \dots, \sigma_{XY,n}^2, \sigma_{xy,1}^2, \dots, \sigma_{xy,n}^2) \quad (97)$$

2. Kovarianční matice lokálních deformací

$$\mathbf{C}_{2,2} := [c(|w_j - w_i|) | i, j \in \{1, 2, \dots, n\}], \quad (98)$$

$$\mathbf{C}_w^\square := [c(|w - w_i|) | i \in \{1, 2, \dots, n\}]. \quad (99)$$

6.4.5 Výpočet transformačních parametrů

$$\mathbf{a}_w := [w, 1],$$

$$\mathbf{A} := [\mathbf{w}, \mathbf{1}_n],$$

$$\mathbf{P} := (\mathbf{B} \mathbf{C}_{\varepsilon, \varepsilon} \mathbf{B}^\sharp + \mathbf{C}_{2,2})^{-1},$$

$$\mathbf{A}^\sharp := \overline{\mathbf{A}^T},$$

$$\widehat{\Delta \mathbf{h}} := (\mathbf{A}^\sharp \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\sharp \mathbf{P} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^\circ).$$

6.4.6 Transformační rovnice

$$\widehat{W} = W^\circ + \mathbf{C}_w^\square \cdot \mathbf{P} \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{W}^\circ - \mathbf{A} \cdot \widehat{\Delta \mathbf{h}}) + \mathbf{a}_w \cdot (\widehat{\Delta \mathbf{h}} + \mathbf{h}^\circ)$$

$$\mathbf{t}_4(x, y) = [\hat{X}, \hat{Y}] = [\Re(\widehat{W}), \Im(\widehat{W})]$$

6.4.7 Výpočet střední souřadnicové chyby transformace

$$w = \text{complex}(t_4^{-1}(\hat{X}, \hat{Y}))$$

$$\sigma_{XY}(\hat{X}, \hat{Y}) = \sqrt{\sigma^2 - \mathbf{C}_w^\square \mathbf{P} (\mathbf{C}_w^\square)^T + (\mathbf{a}_w - \mathbf{C}_w^\square \mathbf{P} \mathbf{A}) (\mathbf{A}^\# \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{a}_w - \mathbf{C}_w^\square \mathbf{P} \mathbf{A})^\#}$$

7 Sběr dat a implementační poznámky

7.1 Sběr identických bodů
















Pro georeferencování mapového listu je potřeba vyhledat na každém mapovém listu dostatečný počet identických bodů. Nejvhodnějšími identickými body jsou trigonometrické body nebo věže kostelů, neboť jejich poloha se většinou nezměnila a jsou k nim dohledatelné souřadnice v současném souřadnicovém systému. K vyhledávání identických bodů je třeba zobrazit ve vhodném grafickém programu naskenovaný mapový list staré mapy a současně též odpovídající území na současném mapovém podkladu, např. SMO-5 nebo ZABAGED. Pomocí interaktivních nástrojů použitého grafického programu (překrývání, zprůhledňování, změna měřítko apod.) se zobrazí vybraný identický bod ve staré a v současné mapě. Pak je možné pomocí myši změřit (odečíst) jeho souřadnice v obou souřadnicových systémech.

Vzhled typických identických bodů v mapách III. vojenského mapování ukazuje tabulka 2. Značka kostel typu 1 - 3 odpovídá ve skutečnosti středu budovy daného kostela, trigonometrický bod na kostelu odpovídá ve skutečnosti věži, na které je trigonometrický bod umístěn.

Pokud není na mapovém listu dostatečný počet identických bodů typu kostel nebo trigonometrický bod, je možné použít také jednotlivé budovy. U nich je ale potřeba zkontrolovat, zda souhlasí jejich poloha s dnešním stavem. To lze nejlépe zjistit podle okolní kresby identického bodu. Při ztotožnění se současným mapovým podkladem, musí odpovídat také okolní kresba. Takto můžeme vyhledávat budovy ve městech nebo vesnicích, kde je předpoklad, že poloha budov byla alespoň částečně zachována.

Sběru identických bodů je potřeba věnovat dostatečnou pozornost, protože špatně zvolený identický bod může negativně ovlivnit výsledek transformace. Proto je vhodné ještě následně vizuálně zkontrolovat okolí identických bodů v přetransformované mapě, zda kresba na staré mapě v okolí identického bodu přibližně odpovídá současnému stavu u těch mapových prvků, které se pravděpodobně nezměnily (komunikace, vodní toky, historická náměstí apod.). Tuto kontrolní fázi nelze zautomatizovat, neboť rozhodování o tom, který mapový prvek by měl být považován za nezměněný a o tom, do jaké míry se má

shodovat jeho stará a nová poloha, je silně závislé na znalostech a zkušenostech operátora. Pokud tato vizuální kontrola neprokáže identitu posuzovaného bodu, pak je třeba tento bod vypustit a transformaci zopakovat bez něj.

Typ IB	Popis IB	Schematická mapová značka	Podoba mapové značky v mapě	
			Barevná	Černobílá
TB	trigonometrický bod			
K1	trigonometrický bod na kostelu			
K2	kostel typ 1			
K3	kostel typ 2			
K4	kostel typ 3			

Tabulka 2: Typy identických bodů

7.2 Výsledná složená transformace

Požadovaná výsledná transformace je složeným zobrazením vytvořeným postupnou aplikací uvedených čtyř dílčích transformací. Výsledná složená transformace je výpočetně velmi náročná. S množstvím identických bodů časová náročnost výpočtu stoupá, proto je vhodné netransformovat každý pixel zvlášť, ale pouze uzlové body vhodně zvolené čtvercové sítě. Mezi uzlovými body se pak jednotlivé pixely bilineárně interpolují. Tím se významně zkrátí doba výpočtu při zachování požadované přesnosti.

Aplikací složené transformace na zdrojový rastrový obraz mapového listu vznikne digitální obraz v požadovaném souřadnicovém systému současného kartografického zobrazení (S-JTSK). Z takto přetransformovaných mapových listů pak lze sestavit bezešvou mozaiku pokrývající větší území. Přiřazení barev přetransformovaným pixelům (převzorkování) lze provést buď metodou nejbližšího souseda nebo některou interpolační metodu (bilineární nebo bikubickou). Metoda nejbližšího souseda spočívá v postupném procházení cílového obrazu a přiřazování hodnot jednotlivým pixelům podle barvy pixelů zdrojového rastrového obrazu pomocí zpětné transformace. Při použití bilineární nebo bikubické interpolace je výsledný obraz více vyhlazený.

8 Přehled použité matematické symboliky

$a := b$ definice objektu a pomocí výrazu b obsahujícího jen symboly známých nebo dříve definovaných objektů

\mathbb{N} množina všech přirozených čísel

\mathbb{R} množina všech reálných čísel

\mathbb{C} množina všech komplexních čísel

$\lfloor x \rfloor$ celá část čísla x , $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{N} \mid k < x\}$

$a \bmod b$ zbytek po dělení čísla a číslem b , $a \bmod b := a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$

\mathbf{i} imaginární jednotka, $\mathbf{i} := \sqrt{-1}$

$\Re(w)$ reálná složka komplexního čísla $w = x + \mathbf{i}y$, $\Re(w) := x \in \mathbb{R}$

$\Im(w)$ imaginární složka komplexního čísla $w = x + \mathbf{i}y$, $\Im(w) := y \in \mathbb{R}$

\bar{w} komplexně sdružené číslo ke komplexnímu číslu $w = x + \mathbf{i}y$, $\bar{w} := x - \mathbf{i}y$

\mathbf{u} vektor

$\mathbf{u} := [u_i \mid i \in I]$... uspořádaná množina prvků u_i náležících do předem daného oboru (čísla, vektory, matice). Index i probíhá indexovou množinu I , pro niž je definována relace lineárního (úplného) uspořádání.

– řádkový vektor ... $[u_i \mid i \in I]$

– sloupcový vektor ... $[u_i \mid i \in I]^T$

\mathbf{u}^\perp vektor kolmý k vektoru \mathbf{u}

$\|\mathbf{u}\|$ norma vektoru, $\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^T}$

\mathbf{A} matice

$\mathbf{A} := [a_{i,j} \mid i \in I, j \in J]$... uspořádaná množina prvků $a_{i,j}$ náležících do předem daného oboru (čísla, vektory, matice). Indexy i, j probíhají indexové množiny I, J , pro něž je definována relace lineárního (úplného) uspořádání. Index i představuje pořadové číslo řádku, index j sloupce.

\mathbf{A}^T transponovaná matice k matici \mathbf{A} ; $\mathbf{A}^T := [a_{j,i} \mid i \in I, j \in J]$

\mathbf{A}^\sharp adjungovaná matice (transponovaná a komplexně sdružená),
 $\mathbf{A}^\sharp := [\overline{a_{j,i}} \mid i \in I, j \in J]$

$\{m, \dots, n\}$ množina přirozených čísel s prvky od m do n ; $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$

$\text{diag}(\mathbf{u})$ diagonální matice, jejíž diagonálu tvoří prvky vektoru \mathbf{u}

$\mathbf{1}_n$ jedničkový vektor (n -rozměrný), $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$,
 $\mathbf{1}_n := [1 \mid i \in \{1, \dots, n\}] = \underbrace{[1, \dots, 1]}_n$.

\mathbf{I}_n jednotková matice n -rozměrná, $\mathbf{I}_n := \text{diag}(\mathbf{1}_n)$

$\mathbf{I}_{2,n}$ obdélníková jedničková matice, $\mathbf{I}_{2,n} := \underbrace{[\mathbf{I}_2, \dots, \mathbf{I}_2]}_n^T$

Reference

- [1] F. Boguszak and Císař J. *Vývoj mapového zobrazení území Československé socialistické republiky, Mapování a měření českých zemí od poloviny 18. století do počátku 20. století*, volume 3. Ústřední správa geodézie a kartografie, Praha, 1961.
- [2] http://en.wikipedia.org/wiki/sinusoidal_projection. WWW.
- [3] Jan Kostelecký et al. Realizace S-JTSK/05 – varianta 2. Technical Report Technická zpráva č. 1153/2010, Výzkumný ústav geodetický, topografický a kartografický, v.v.i., červen 2010.
- [4] Roman Krňoul. Přesnost zobrazení trigonometrických bodů na mapách III. vojenského mapování. Bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Plzeň, 2010.
- [5] Pavel Seemann. Kartometrická analýza polohového souladu mapové kresby a kilometrové sítě na speciálních mapách SM75. Diplomová práce, České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební, Praha, 2008.
- [6] Milan Talich, Lubomír Soukup, Jan Havrlant, Klára Ambrožová, Ondřej Böhm, and Filip Antoš. Georeferencing of the third military survey of austrian monarchy. In *26th International Cartographic Conference*, Dresden, May 2013. http://www.icc2013.org/_contxt/_medien/_upload/proceeding/266_proceeding.pdf.
- [7] Milan Talich, Lubomír Soukup, Jan Havrlant, Klára Ambrožová, Ondřej Böhm, and Filip Antoš. Nový postup georeferencování map III. vojenského mapování. *Kartografické listy*, 21(2), 2013.
- [8] Václav Čada. Analýza lokalizace rastrových ekvivalentů III. vojenského mapování do S-JTSK. In *Geoinformatika ve veřejné správě*, Brno, 2006.